Тренировочная работа №2
по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант № 1

Район ______________________

Город (населенный пункт) ______________________

Школа ______________________

Класс ______________________

Фамилия ______________________

Имя ______________________

Отчество ______________________

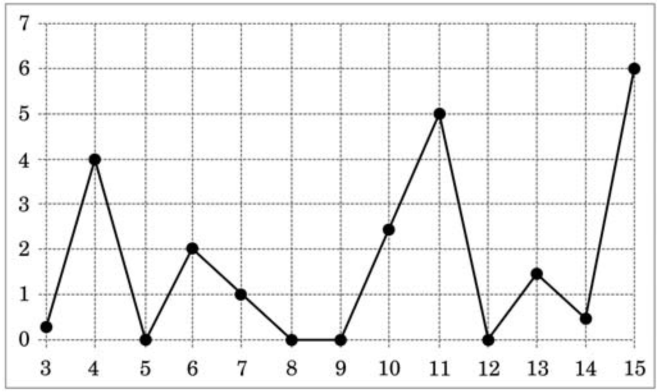
Часть 1

Ответом на задания B1–B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Сергей Ильич купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Считайте, что 1 миля равна 1,6 км. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 54 мили в час?

Ответ: ______________________

B2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней за данный период осадков не было.



Ответ: ______________________

B3 Найдите корень уравнения

$$\log_2(3 - x) = 9.$$

Ответ: ______________________

B4 В треугольнике ABC $AC = BC$, AD — высота, угол BAD равен 28°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

Ответ:

B5 В таблице указаны средние цены на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным некоторого исследования).

Наименование продукта	Средняя цена (в рублях)		
	Петрозаводск	Ставрополь	Омск
Пшеничный хлеб (батон)	18	11	16
Молоко (1 литр)	28	20	24
Картофель (1 кг)	9	13	16
Сыр (1 кг)	240	215	260
Мясо (говядина) (1 кг)	275	230	295
Подсолнечное масло (1 литр)	38	44	50

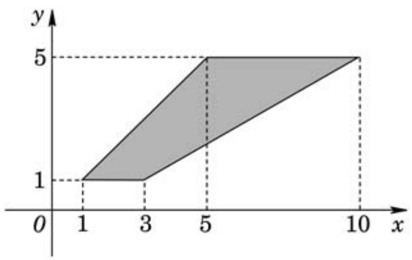
Определите, в каком из этих трех городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов:

- 2 кг картофеля;
- 1 кг сыра
- 1 л подсолнечного масла

В ответ запишите полученную сумму в рублях.

Ответ:

B6 Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.

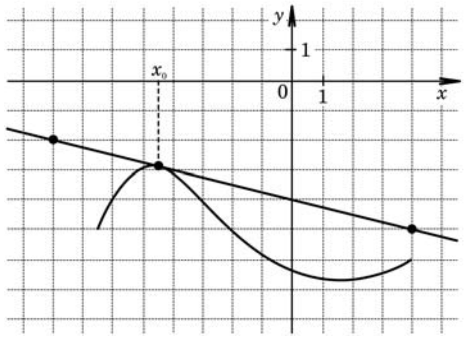


Ответ:

B7 Найдите $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

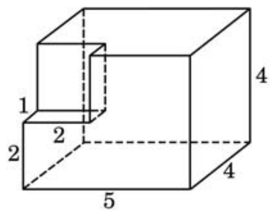
Ответ:

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

B9 Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ:

B10 Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\,\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 40%, если температура холодильника $T_2 = 315$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

Ответ:

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = (x+4)(x-2)^2 - 22$ на отрезке $[-4;\,3]$.

Ответ:

B12 В четверг акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а в пятницу подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С4 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение

$$(\sin 2x - \sin x)\left(\sqrt{2} + \sqrt{-2\operatorname{ctg} x}\right) = 0.$$

C2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BT, где T — середина ребра AD.

C3 Решите неравенство

$$\left((x+1)^{-1} - (x+6)^{-1}\right)^2 \le \frac{\left|x^2 - 10x\right|}{\left(x^2 + 7x + 6\right)^2}.$$

C4 Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 4. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.

Тренировочная работа №2
по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант № 2

Район ____________________

Город (населенный пункт) ____________________

Школа ____________________

Класс ____________________

Фамилия ____________________

Имя ____________________

Отчество ____________________

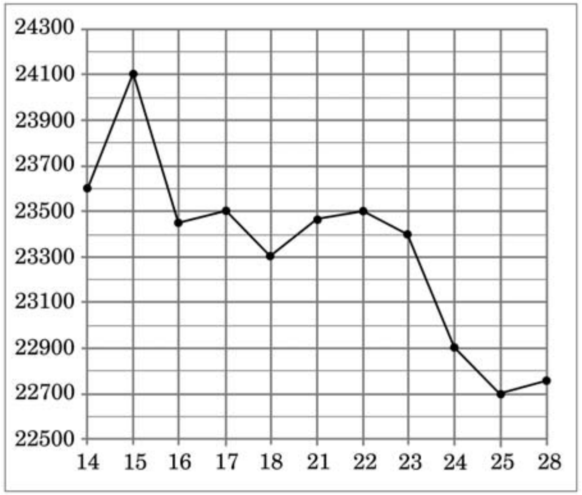
Часть 1

Ответом на задания B1–B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

B1 1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 10 копеек. Счетчик электроэнергии 1 августа показывал 43364 киловатт-часа, а 1 сентября показывал 43549 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за август?

Ответ: ____________________

B2 На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа за данный период цена олова на момент закрытия торгов была наименьшей.



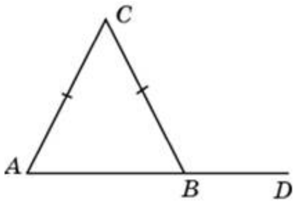
Ответ: ____________________

B3 Найдите корень уравнения:

$$\sqrt{57-4x} = 9.$$

Ответ:

B4 В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 62°. Найдите внешний угол CBD. Ответ дайте в градусах.



Ответ:

B5 Магазин заключает договоры с производителями сервизов. В договорах указывается, какой процент от суммы, вырученной за продажу товара, поступает в доход магазина (см. табл.1).

Табл. 1

Фирма-производитель	Процент от выручки, поступающий в доход магазина	Примечания
«Альфа»	24 %	Изделия ценой до 20 000 р.
«Альфа»	16 %	Изделия ценой свыше 20 000 р.
«Бета»	18 %	Все изделия
«Омикрон»	20 %	Все изделия

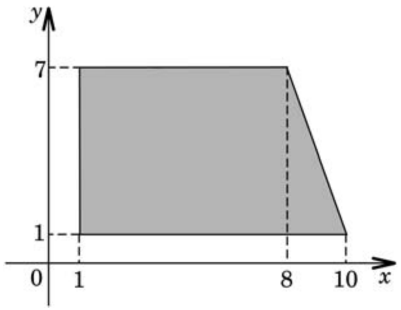
В прейскуранте (табл.2.) приведены цены на четыре сервиза. Определите, продажа какого сервиза наиболее выгодна для магазина. В ответе запишите сумму, которая поступит в доход магазина от продажи этого сервиза. Ответ дайте в рублях.

Табл. 2

Фирма-производитель	Изделие	Цена
«Альфа»	Сервиз «Каир»	18 000 р.
«Альфа»	Сервиз «Командор»	25 000 р.
«Бета»	Сервиз «Купеческий»	22 000 р.
«Омикрон»	Сервиз «Контраст»	20 000 р.

Ответ:

B6 Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 1), (10; 1), (8; 7), (1; 7).

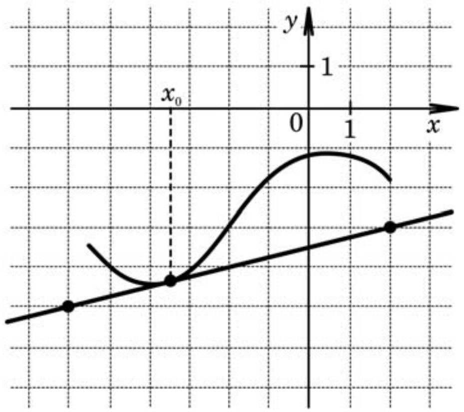


Ответ: ____________

B7 Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

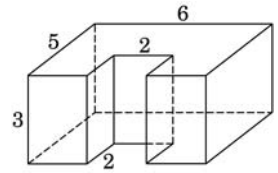
Ответ: ____________

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ____________

B9 Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ____________

B10 При температуре $0°C$ рельс имеет длину $l_0 = 12$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t°) = l_0(1 + \alpha \cdot t°)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}\,(°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, $t°$ — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 7,2 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: ____________

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{2x}{x^2 + 16}$ на отрезке $[-10;\ 10]$.

Ответ: ____________

B12 В 2008 году в городском квартале проживало 60000 человек. В 2009 году в результате строительства новых домов число жителей выросло на 5%, а в 2010 году — на 6% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

Ответ: ____________

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С4 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение

$$(\sin 2x + \cos x)\left(\sqrt{3} + \sqrt{3\operatorname{tg} x}\right) = 0.$$

C2 Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO, где L — середина ребра MC, O — центр грани ABC.

C3 Решите неравенство

$$\left((-x+1)^{-1}-(-x+4)^{-1}\right)^2 \le \frac{\left|x^2+6x\right|}{\left(x^2-5x+4\right)^2}.$$

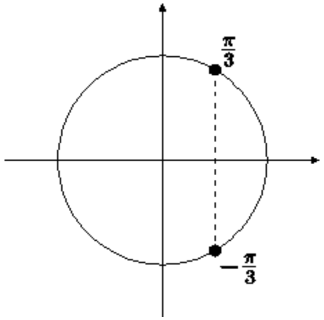
C4 Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 0,5. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите уравнение

$$(\sin 2x - \sin x)\left(\sqrt{2} + \sqrt{-2\operatorname{ctg} x}\right) = 0.$$

Решение:



Левая часть уравнения имеет смысл при $\operatorname{ctg} x \le 0$ и $\sin x \ne 0$.

Выражение $\sqrt{2} + \sqrt{-2\operatorname{ctg} x}$ положительно при всех допустимых x.

Значит,

$$\sin 2x - \sin x = 0;\ \ \sin x(2\cos x - 1) = 0.$$

Учитывая, что $\sin x \ne 0$, получаем: $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Учитывая, что $\operatorname{ctg} x \le 0$, находим, что числа $\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$ не являются решениями.

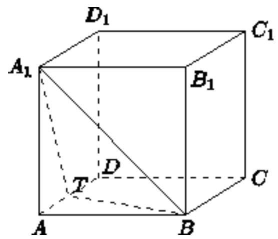
Значит, решениями являются только числа $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю множитель $\sin 2x - \sin x$. Имеется указание на то, что второй множитель отличен от нуля, но отбор найденных значений либо не произведён, либо произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BT, где T — середина ребра AD.

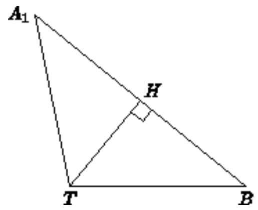
Решение:



Пусть h — искомое расстояние. Найдём двумя способами объём пирамиды A_1ATB.

С одной стороны, он равен $\frac{1}{3} \cdot A_1A \cdot S_{ATB} = \frac{1}{12}$.

С другой стороны, он равен $\frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{A_1TB}$.



Треугольник A_1BT — равнобедренный; его основание A_1B равно $\sqrt{2}$, а боковые стороны равны $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Если H — середина основания A_1B, то $TH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому $S_{A_1BT} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Следовательно, объём пирамиды A_1ATB равен $h \cdot \frac{\sqrt{6}}{12}$.

Приравняем выражения для объёма: $h \cdot \frac{\sqrt{6}}{12} = \frac{1}{12}$, откуда $h = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите неравенство

$$\left((x+1)^{-1} - (x+6)^{-1}\right)^2 \le \frac{\left|x^2 - 10x\right|}{\left(x^2 + 7x + 6\right)^2}.$$

Решение:

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\left|x^2-10x\right|-25}{\left(x^2+7x+6\right)^2}\geq 0;\quad \begin{cases} x\neq -6, \\ x\neq -1, \\ \left|x^2-10x\right|\geq 25. \end{cases}$$

Решим неравенство $\left|x^2-10x\right|\geq 25$:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-10x-25\geq 0, \\ x^2-10x+25\leq 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x\geq 5+5\sqrt{2}, \\ x\leq 5-5\sqrt{2}, \\ x=5. \end{array}\right.$$

Осталось исключить точки -6 и -1.

Ответ: $(-\infty;\ -6)$, $(-6;\, 5-5\sqrt{2}\ ]$, 5, $[5+5\sqrt{2};\ +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к квадратным неравенствам. Получен ответ, отличающийся от верного только конечным количеством значений переменной, при которых определены обе части данного неравенства	2
Решение содержит верные преобразования левой части неравенства, сводящие его к совокупности квадратных неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 4. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.

Решение:

Возможны два случая: точка T лежит на продолжении стороны AD за точку A или на продолжении стороны AD за точку D.

Пусть α – угол между прямыми MT и AB.

Рассмотрим первый случай (рис.1).

Заметим, что $S_{BMT}=S_{BNT}+S_{BMN}$.

$AN=4$, поэтому $AT=AN\,\mathrm{tg}\alpha=16$.

Значит, $S_{BNT}=\frac{1}{2}\cdot BN\cdot AT=32$.

Кроме того, $S_{BMN}=\frac{1}{2}\cdot BN\cdot BC=16$.

Следовательно, $S_{BMT}=32+16=48$.

Во втором случае (рис.2) $S_{BMT}=S_{BNT}-S_{BMN}$.

По-прежнему $AT=16$, $S_{BNT}=32$, $S_{BMN}=16$.

Следовательно, $S_{BMT}=32-16=16$.

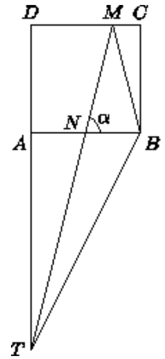


Рис.1

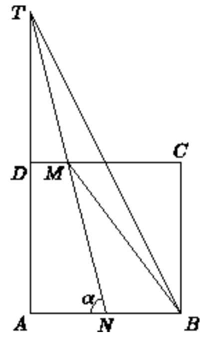


Рис.2

Ответ: 16 или 48.

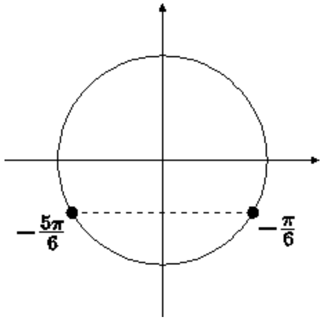
Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение

$$(\sin 2x + \cos x)\left(\sqrt{3} + \sqrt{3\operatorname{tg} x}\right) = 0.$$

Решение:



Левая часть уравнения имеет смысл при $\operatorname{tg} x \ge 0$ и $\cos x \ne 0$. Выражение $\sqrt{3} + \sqrt{3\operatorname{tg} x}$ положительно при всех допустимых x.

Значит,

$$\sin 2x + \cos x = 0;\ \cos x(2\sin x + 1) = 0.$$

Учитывая, что $\cos x \ne 0$, получаем:

$$\sin x = -\frac{1}{2};\ \ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z.$$

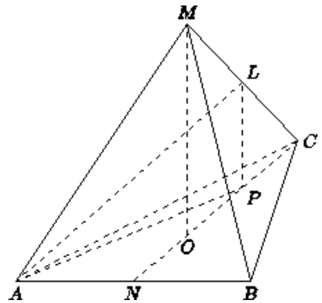
Учитывая, что $\operatorname{tg} x \ge 0$, находим, что числа $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$ не являются решениями. Значит, решениями являются только числа $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$.

Ответ: $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю множитель $\sin 2x + \cos x$. Имеется указание на то, что второй множитель отличен от нуля, но отбор найденных значений либо не произведён, либо произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

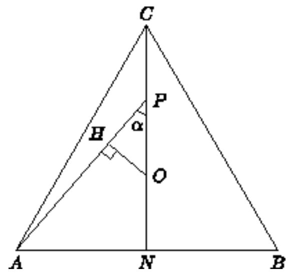
C2 Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO, где L — середина ребра MC, O — центр грани ABC.

Решение:



Пусть N — середина ребра AB, а P — середина отрезка OC. Прямая AL лежит в плоскости APL, параллельной прямой MO. Поэтому искомое расстояние равно расстоянию от прямой MO до плоскости APL.

Опустим из точки O перпендикуляр OH на прямую AP. Тогда $OH \perp APL$, и нам остаётся найти длину отрезка OH.



$CO : ON = 2 : 1$, поэтому точки P и O делят отрезок CN на три равные части длиной $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ каждая.

Обозначим угол APN буквой α.

В треугольнике APN

$$AN = \frac{1}{2},\ \ PN = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \ AP = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}},$$

следовательно, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

Теперь из треугольника OPH находим, что $OH = OP \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите неравенство

$$\left((-x+1)^{-1}-(-x+4)^{-1}\right)^2 \le \frac{\left|x^2+6x\right|}{\left(x^2-5x+4\right)^2}.$$

Решение:

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\left|x^2+6x\right|-9}{\left(x^2-5x+4\right)^2} \ge 0; \quad \begin{cases} x \ne 1, \\ x \ne 4, \\ \left|x^2+6x\right| \ge 9. \end{cases}$$

Решим неравенство $\left|x^2+6x\right| \ge 9$:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+6x-9 \ge 0, \\ x^2+6x+9 \le 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \ge -3-3\sqrt{2}, \\ x \le -3+3\sqrt{2}, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Осталось исключить точки 1 и 4.

Ответ: $(-\infty;\ -3-3\sqrt{2}]$, -3, $[-3+3\sqrt{2};\ 4)$, $(4;\ +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к квадратным неравенствам. Получен ответ, отличающийся от верного только конечным количеством значений переменной, при которых определены обе части данного неравенства	2
Решение содержит верные преобразования левой части неравенства, сводящие его к собокупности квадратных неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 0,5. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.

Решение:

Возможны два случая: точка T лежит на продолжении стороны AD или на стороне AD.

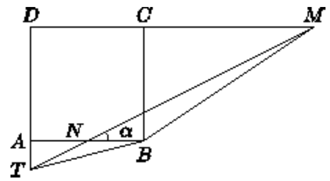


Рис.1

Пусть α – угол между прямыми MT и AB.

Рассмотрим первый случай (рис.1).

Заметим, что $S_{BMT} = S_{BNT} + S_{BMN}$.

$AN = 4$, поэтому $AT = AN\,\mathrm{tg}\alpha = 2$.

Значит, $S_{BNT} = \frac{1}{2} \cdot BN \cdot AT = 4$.

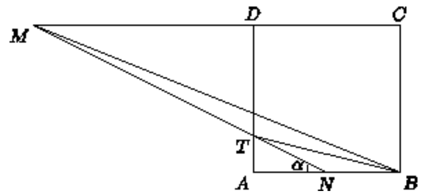


Рис.2

Кроме того, $S_{BMN} = \frac{1}{2} \cdot BN \cdot BC = 16$.

Следовательно, $S_{BMT} = 4 + 16 = 20$.

Во втором случае (рис.2) $S_{BMT} = S_{BMN} - S_{BNT}$.

По-прежнему $AT = 2$, $S_{BNT} = 4$, $S_{BMN} = 16$.

Следовательно, $S_{BMT} = 16 - 4 = 12$.

Ответ: 12 или 20.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	86,4
B2	4
B3	-509
B4	56
B5	285
B6	14

№ задания	Ответ
B7	-0,4
B8	-0,25
B9	112
B10	525
B11	10
B12	30

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	203,5
B2	25
B3	-6
B4	121
B5	4320
B6	48

№ задания	Ответ
B7	-0,25
B8	0,25
B9	130
B10	50
B11	0,25
B12	66780