B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
5	6	4	18	1100	15
B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**
125	-0,75	45	7	-3	10

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\sqrt{y}} = 0, \\ y - \cos x = 0. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ находим: $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 1$.

1) Пусть $\sin x = \frac{1}{2}$, тогда либо $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$,

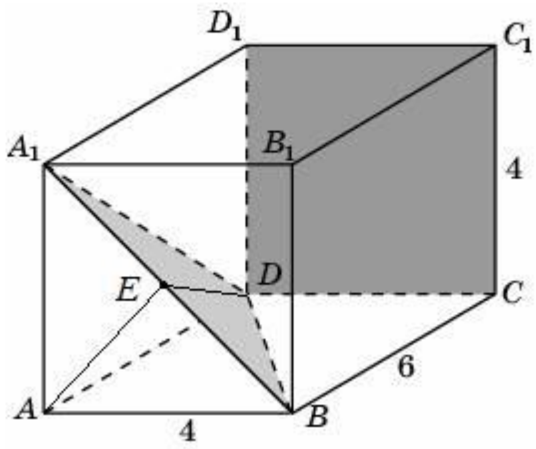
либо $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ — не дает решения.

2) Пусть $\sin x = 1$, тогда $y = \cos x = 0$ — не дает решения.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	**Балл**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1.



Решение.

Вместо плоскости CDD_1 возьмем параллельную ей плоскость ABB_1. Пусть E — середина BA_1. $DE \perp BA_1$, $AE \perp BA_1$. Значит, угол DEA — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника DAE находим:

$$\operatorname{tg}\angle DEA = \frac{AD}{AE} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C3 Решите неравенство

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \ge 4\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях:

$$\begin{cases} x \ne 0, \\ 5-x \ge 0, \\ 5-x \ne 1 \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x \le 5, \\ x \ne 0, \\ x \ne 4. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2-6x+9}=1$, т.е. $|x-3|=1$ и, значит, $x=2$ или $x=4$.

Значит, $x=2$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2-6x+9}\ne 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2$, получим: $x+\frac{3}{x}\ge 4$, откуда $\frac{(x-1)(x-3)}{x}\ge 0$. Решим это неравенство:

$0<x\le 1,\ \ x\ge 3$.

С учетом ограничений получаем: $0<x\le 1,\ x=2,\ 3\le x<4,\ 4<x\le 5$.

Ответ: $0<x\le 1,\ x=2,\ 3\le x<4,\ 4<x\le 5$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1

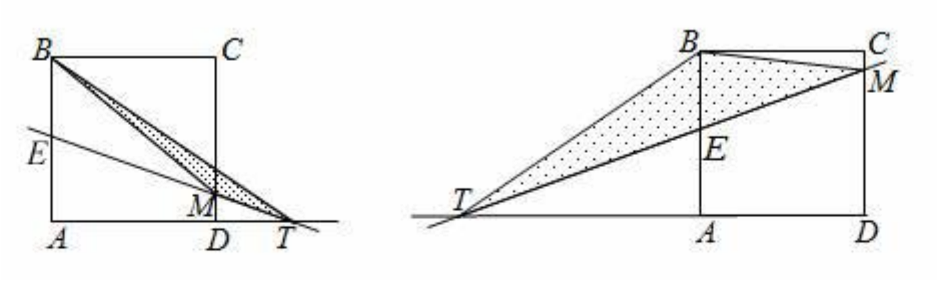
© 2009 МИОО

Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

© 2009 МИОО

C4 Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $\mathrm{tg}\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Решение.



Рассмотрим два случая (см. рис. 1 и рис. 2):

1) $S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} - S_{\Delta BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT - \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD =$

$= \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \mathrm{tg}\alpha - AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 - 4) = 2.$

2) $S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} + S_{\Delta BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT + \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD =$

$= \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \mathrm{tg}\alpha + AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 + 4) = 10.$

Ответ: 2 или 10.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

© 2009 МИОО

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства

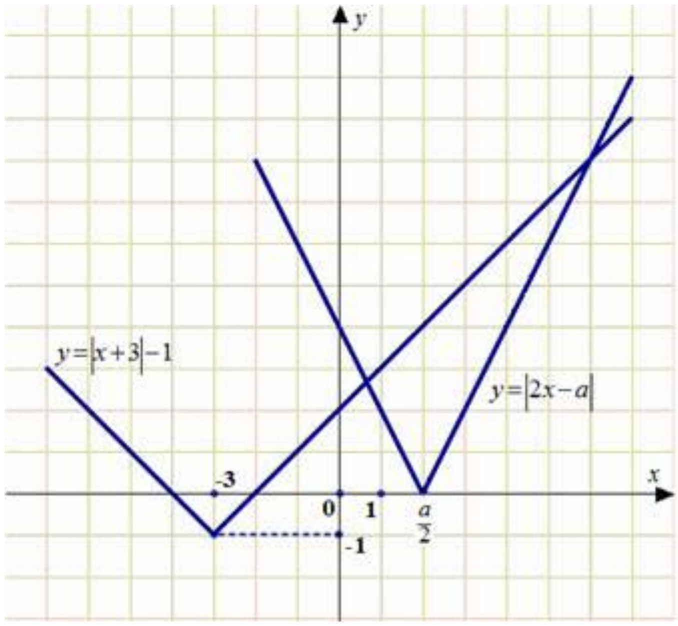
$$|2x-a|+1 \le |x+3|$$

образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем единицу: $|2x-a| \le |x+3|-1$.

Построим схематично графики функций $y=|2x-a|$ и $y=|x+3|-1$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{2} \le -4$ или $\frac{a}{2} \ge -2$.

1) $\begin{cases} a \le -8, \\ |2x-a| \le -x-4; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le -8, \\ 2x-a \le -x-4, \\ 2x-a \ge x+4; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le -8, \\ x \le \dfrac{a-4}{3}, \\ x \ge a+4. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a-4}{3}-(a+4)=1$, откуда $a=-\frac{19}{2}$.

2) $\begin{cases} a \ge -4, \\ |2x-a| \le x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge -4, \\ 2x-a \le x+2, \\ 2x-a \ge -x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge -4, \\ x \le a+2, \\ x \ge \dfrac{a-2}{3}. \end{cases}$

© 2009 МИОО

Решения образуют отрезок длины 1, если $a+2-\dfrac{a-2}{3}=1$, откуда $a=-\dfrac{5}{2}$.

Ответ: $a=-\dfrac{5}{2}$, $a=-\dfrac{19}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра.	1
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильная аналитика.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери одного из значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

C6 Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+y^2<18x-20y-166, \\ 32x-y^2>x^2+12y+271. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x-9)^2+(y+10)^2<15, \\ (x-16)^2+(y+6)^2<21, \\ x,y\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого и второго неравенств системы:

$$\begin{cases} (x-9)^2<15, \\ (x-16)^2<21; \end{cases} \begin{cases} 6\le x\le 12, \\ 12\le x\le 20; \end{cases} \quad x=12.$$

Подставляя $x=12$ в систему, получаем:

$$\begin{cases} (y+10)^2<6, \\ (y+6)^2<5, \\ y\in\mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -2\le y+10\le 2, \\ -2\le y+6\le 2, \\ y\in\mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -12\le y\le -8, \\ -8\le y\le -4, \\ y\in\mathbb{Z}; \end{cases} \quad y=-8.$$

Ответ: $(12;-8)$.

© 2009 МИОО

Содержание критерия	**Балл**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4

© 2009 МИОО